LA RELATION ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LA RÉALITÉ : UNE INTRODUCTION

à propos de :

Pourquoi le monde est-il mathématique ?

de **John D. BARROW**

Traduit de l'italien par
Béatrice Propetto Marzi
Éditions Odile Jacob (Opus), 1996.

Titre original : *Perché il mondo è matematico ?* (Laterza, 1992)..

Les scientifiques, principalement les physiciens, utilisent les mathématiques pour décrire le monde et faire des prévisions. Et ça marche ! On ne s'étonne peut-être pas assez de cet accord entre une discipline issue de la pensée humaine indépendamment de toute expérience et le monde matériel. Après tout, on pourrait très bien imaginer que les mathématiques ne soient qu'un divertissement de l'esprit et ne s'appliquent pas au réel. Pour expliquer cet accord, il faut revenir sur la nature des mathématiques. Le problème est que plusieurs conceptions s'opposent entre elles. Aussi, en bon vulgarisateur, John D. BARROW se propose-t-il de nous en donner un aperçu clair et de nous présenter sa propre thèse (voir sommaire p. 4).

John D. Barrow commence par retracer la genèse de la notion de nombre, et nous montre que toutes les sociétés n'en ont pas possédé une notion abstraite. Il en conclut que les mathématiques ne sont pas une activité aussi « naturelle » qu'on pourrait le penser. Puis, après ce rappel historique, il se penche sur la nature des mathématiques. Quatre thèses philosophiques sont envisagées : **l'empirisme, le formalisme, le réalisme et l'intuitionnisme.**

L'empirisme soutient que les mathématiques sont de purs produits de l'esprit, des inventions humaines, et qu'il n'y a aucune raison de penser que le monde est mathématique. Certes, le monde nous paraît structuré mathématiquement, mais on peut penser que tout ne nous apparaît pas. Les mathématiques ne seraient donc qu'un filtre construit par l'homme et elles ne lui permettraient d'appréhender qu'une partie de la réalité. Néanmoins, si les mathématiques étaient une création de l'esprit humain, on devrait, selon John D. Barrow, distinguer des particularités culturelles significatives. Or, le théorème de Pythagore, par exemple, est vrai pour tout le monde. Ainsi, contre cette conception empiriste, John D. Barrow soutient que les mathématiques existent bel et bien en dehors de l'esprit humain.

Refusant ce genre de débat, **les formalistes** conçoivent les mathématiques comme une manipulation de symboles sans signification, et ils ne cherchent pas à rendre compte de leur lien avec le réel. Pour eux, le mathématicien doit seulement s'efforcer de définir les mathématiques le plus rigoureusement possible pour qu'elles ne se contredisent pas. Mais cette tentative de démontrer la cohérence de toute proposition mathématique ne peut aboutir : en 1931, Kurt Gödel montra que, dans une théorie axiomatique suffisamment riche pour contenir l'arithmétique, il existait des propositions que l'on ne pouvait ni prouver ni réfuter, bref des propositions dont la vérité était indécidable. Ce qui voulait dire que, pour statuer sur la vérité de certaines propositions mathématiques, il fallait sortir du cadre formel des axiomes et des règles. Les mathématiques ne pouvaient plus être considérées comme un système clos fermé sur lui-même.

Si la vérité mathématique est au-delà des axiomes et des règles, il faut peut-être considérer que les entités mathématiques existent indépendamment de nos efforts pour les définir. C'est la thèse soutenue par **le réalisme** — ou platonisme mathématique —, pour qui, par exemple, le nombre « Pi » existe réellement dans le monde et n'est pas une invention de l'homme ; il a été découvert comme on a découvert l'Amérique. Selon une telle conception, un nombre existe donc indépendamment du monde concret que nous connaissons, et se concrétise dans des cas précis (le nombre 12 se concrétise dans les 12 apôtres, les 12 constellations…). Que le monde matériel ne soit que l'incarnation du monde mathématique permet bien d'expliquer l'incroyable efficacité des mathématiques à décrire la nature. Le problème avec une telle conception c'est qu'elle ne dit pas où se trouve cet autre monde d'abstractions mathématiques, ni comment entrer en contact avec lui.

La dernière conception présentée par John D. Barrow évite ce problème. Selon **les intuitionnistes**, les mathématiques, en effet, doivent se construire à partir de notre intuition. Or, celle-ci, d'après eux, ne nous donnerait accès qu'aux nombres entiers (1,2,3...). C'est pourquoi les intuitionnistes rejettent des entités telles que les ensembles infinis dont on ne peut avoir aucune expérience concrète et qui n'ont rien à voir avec l'intuition (en effet, l'infini moins l'infini peut encore être égal à l'infini). À partir des nombres entiers, ils considèrent alors que toute proposition mathématique doit être obtenue après un nombre fini d'étapes. Mais cela crée une nouvelle catégorie de propositions mathématiques. Chaque proposition peut maintenant se voir attribuer trois valeurs : vraie, fausse, ni vraie ni fausse (ou indécidable). En effet, on ne peut rien dire d'une proposition dont la vérité ne peut être déterminée par un nombre fini d'étapes. De plus, comme le raisonnement par l'absurde s'appuie sur l'idée qu'une proposition ne peut être que vraie ou fausse, ce mode de raisonnement n'est pas valable pour les intuitionnistes. À cette conception des mathématiques, John D. Barrow conteste, entre autres, qu'il existe une intuition universelle des nombres naturels et se demande s'il n'est pas possible d'avoir une intuition de l'infini. Il remarque aussi que selon cette conception on n'explique pas comment des concepts non validés par la démarche des intuitionnistes peuvent être utiles dans l'étude du monde physique.

Ces critiques amènent alors John D. Barrow à présenter sa propre conception, construite sur le modèle de l'ordinateur. Un exemple servira à l'introduire. Soit la suite de nombres 2, 4, 6, 8... C'est une suite infinie. Or, on peut la définir plus simplement comme l'ensemble des nombres pairs, c'est-à-dire qu'on peut réduire le nombre d'informations nécessaires à la définir (ou à la produire par un ordinateur). On dit dans ce cas que la suite est réductible à un algorithme. Une suite qui se caractérise par le fait qu'il n'existe pas de formule plus courte qu'elle pour la définir est une suite aléatoire (sa complexité est maximale). À l'image de cet exemple, John D. Barrow interprète les lois formulées par les physiciens comme des réductions algorithmiques des observations. Les mathématiques étant le langage de l'abréviation des suites, elles s'appliquent « naturellement » au réel. Ainsi, le monde serait mathématique au sens où il serait algorithmiquement réductible.

Ainsi, John D. Barrow nous invite à appréhender les lois de la nature, non pas à travers les notions d'invariance et de symétrie, comme c'est souvent le cas en physique, mais plutôt à travers celles de calcul et d'algorithme. Selon cette conception, l'univers n'obéirait pas à un schéma géométrique qu'il s'agirait de décrire, mais évoluerait comme un programme d'ordinateur qu'il nous faudrait décoder. John D. Barrow est alors conduit à nous présenter tout naturellement la notion de calculabilité (en référence à Turing), ainsi que celle de hasard des nombres (en référence à Chaitin). Ce qui fait que ce petit livre peut être abordé comme une introduction à la philosophie des mathématiques contemporaines.

Thomas LEPELTIER,
le 28 juillet 1998.

Sommaire

128 pages

ISBN 2-7381-0392-8

50 FF (1998)